

ANTRIEB EINES SPIELKREISELS DURCH  
TAUMELBEWEGUNGEN SEINES GEHÄUSES

GERHARD SCHWEITZER

Uebersicht: Der Spielkreisel - ein Schwungrad, das in einem Gehäuse gelagert ist - lässt sich allein dadurch auf hohe Touren bringen, dass man das Gehäuse in die Hand nimmt und aus dem Handgelenk heraus kreisende Drehbewegungen ausführt. Dabei übt der Kreisel starke Kräfte auf die haltende Hand aus. Dieser überraschende Antriebsmechanismus wird durch das Zusammenwirken von Kreisel- und Reibungskräften erklärt und lässt sich als Selbsterregung deuten.

1. Einleitung

Kreisel eignen sich besonders gut zum Spielen. Sie stecken voller Ueberraschungen und zeigen oft mechanische Verhaltensweisen, die auf den ersten Blick paradox erscheinen. Der Spielkreisel, von dem hier die Rede sein soll, hat etwa die Form eines Apfels. Man kann ihn gut in die Hand nehmen (Bild 1). Er besteht aus einem Gehäuse, in dem ein Schwungrad beweglich gelagert ist. Ein Teil dieses Rotors ragt aus dem Gehäuse so weit heraus, dass man ihn z.B. durch schnelles Abrollen auf einer Schreibtischunterlage andrehen kann. Der Ueberraschungseffekt liegt nun darin, dass sich der Kreisel allein durch ein geeignetes Handkreisen weit über die Anfangsdrehzahl hinaus, bis etwa 7500 U/min, aufziehen lässt; und dabei entwickelt er so grosse Kräfte, dass er fast aus der

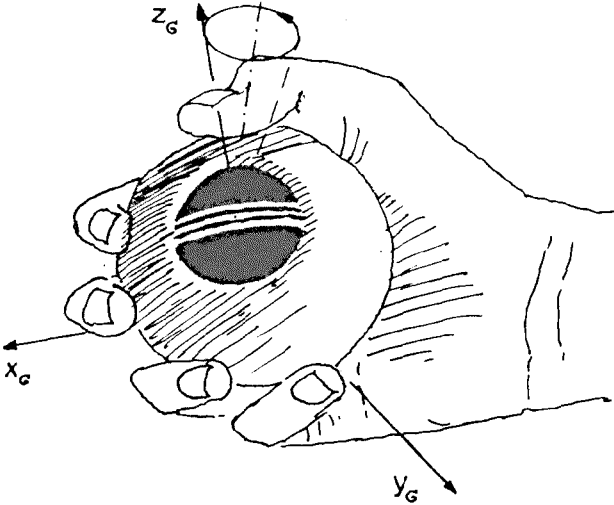


Bild 1: Spielkreisel - Gehäuse und teilweise sichtbares Schwungrad - und angedeutete Drehbewegung der Hand

Hand springt. Möglicherweise ist der Kreisel ursprünglich auch als Trainingsgerät für die Hand- und Armmuskulatur gedacht worden /1/. Im folgenden wird gezeigt, wie Kreisel- und Reibungskräfte bei diesem Antriebsmechanismus zusammenwirken.

## 2. Aufbau und Funktion

Der innere Aufbau des Kreisels geht aus Bild 2 hervor. Die Achse des kräftigen Schwungrads wird in dem ringförmigen Spalt zwischen dem Ober- und dem Unterteil des Gehäuses geführt. Das Schwungrad kann sich also innerhalb des Gehäuses mit der Drehzahl  $\omega_s$  um die Laufachse  $x$  drehen, und dabei kann die Laufachse auf den Laufflächen des ringförmigen Führungsspalt abrollen. Damit dieses Abrollen möglich ist,

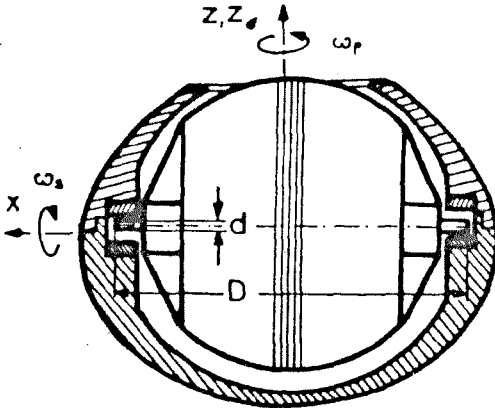


Bild 2: Querschnitt

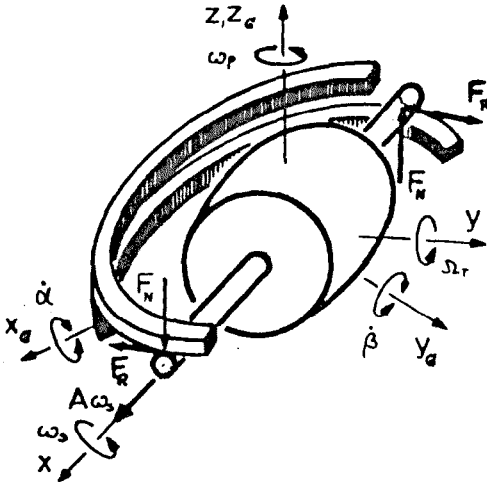


Bild 3: Abrollen des Kreisels auf den Laufflächen

muss die Laufachse etwas schräg stehen; also mit einer Seite am oberen Gehäuseteil, mit der anderen Seite am unteren Gehäuseteil anliegen. Zwischen der daraus resultierenden Präzessionsgeschwindigkeit  $\omega_p$  und der Drehzahl  $\omega_s$  besteht die kinematische Beziehung

$$\omega_p = \frac{d}{D} \omega_s \quad (1)$$

und  $\omega_p$  ist natürlich viel kleiner als  $\omega_s$ , da das kinematische Übersetzungsverhältnis  $D/d$  gross ist.

Dieses Abrollen der Laufachse (Bild 3) kommt allerdings nicht von alleine in Gang. Dazu ist die schon genannte Taumelbewegung des Gehäuses erforderlich. Diese Taumelbewegung lässt sich z.B. durch die Angabe der Drehgeschwindigkeiten

um die gehäusefesten Achsen  $x_G, y_G$  beschreiben

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\Omega_T \sin \phi(t) \\ \dot{\beta} &= \Omega_T \cos \phi(t)\end{aligned}\quad (2)$$

Die Kunst besteht nun darin, diese Drehgeschwindigkeit durch entsprechendes Handkreisen zu erzeugen und dabei vor allem dafür zu sorgen, dass die "Taumelfrequenz"  $\dot{\phi}$  mit der Präzessionsfrequenz  $\omega_P$  übereinstimmt:

$$\dot{\phi} = \omega_P \quad (3)$$

Denn dann lässt sich die Taumelbewegung durch die Drehgeschwindigkeit  $\Omega_T$  um die mitpräzedierende  $y$ -Achse angeben, und die ganze Kreiselbewegung lässt sich qualitativ einfach mit dem Satz vom gleichsinnigen Parallelismus /2/ erklären: Der Kreisel mit dem anfänglichen Eigendrall  $A\omega_{S0}$  versucht sich auf dem kürzesten Weg in die Richtung der Zwangsdrehung  $\Omega_T$  einzustellen. Dadurch kommt die Präzessionsbewegung  $\omega_P$  zustande. Die Laufachse möchte sich auch in die Richtung dieser Drehbewegung  $\omega_P$  einstellen, stösst dabei aber an die ringförmige Führung an, stellt sich also schräg und damit ist der Abrollmechanismus in Gang gekommen. Beim Anpressen an die Laufflächen wirken Kräfte auf das Schwungrad (Bild 3). Die Reibungskraft, d.h. das Moment  $M_x = F_R \cdot d$ , treibt den Kreisel an. Die Drehzahl  $\omega_S$  hängt nach (1) von der Präzessionsfrequenz  $\omega_P$  und damit von der Taumelfrequenz der Handbewegung ab. Diese Taumelfrequenz kann man langsam erhöhen und damit den Kreisel "antreiben". Offensichtlich sind aber der Frequenz der Handbewegung natürliche Grenzen gesetzt, und ausserdem treten bei der Richtungsänderung der Laufachse Kreiselmomente auf, die mit der Drehzahl zunehmen und die Hand stark beanspruchen.

Im Grunde beruht der Antrieb des Kreisels auf einer Selbsterregung, ähnlich wie bei einer schwingenden Schaukel /3/. Die Selbststeuerung der Taumelfrequenz im Takte der Präzessionsfrequenz wird hier über die Hand erreicht, die auf das Kreiselmoment des präzedierenden Kreisels reagiert.

Im folgenden werden diese qualitativen Erläuterungen anhand der Bewegungsgleichungen abgeleitet.

### 3. Analyse der Bewegung

Die bei der Bewegung auftretenden Drehgeschwindigkeiten werden zuerst in einem geeigneten Bezugssystem, dem mit dem Schwungrad präzedierenden Zwischensystem  $xyz$ , angegeben. In diesem Bezugssystem werden die Bewegungsgleichungen besonders einfach. Sie lassen sich integrieren, die Lösungen werden diskutiert.

Ausgehend von einem Inertialsystem  $x_I, y_I, z_I$  (Bild 4) kann man die angedeutete Taumel-

bewegung des gehäusefesten Bezugssystems  $x_G, y_G, z_G$  durch die Drehgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$  beschreiben. Für kleine Taumelwinkel sind die Koordinaten der Gehäusedrehgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_G$  im Inertialsystem  ${}_I\omega_G$  bzw. im Gehäusesystem  ${}_G\omega_G$ :

$${}_I\omega_G \approx {}_G\omega_G = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \Omega_T \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

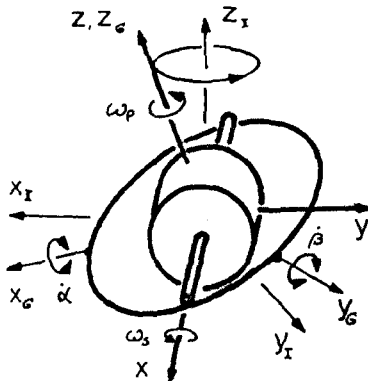


Bild 4: Koordinatensysteme

Die Amplitude  $\Omega_T$  der Taumelgeschwindigkeit möge konstant sein und vorgegeben.

Das Zwischensystem xyz dreht sich gegenüber dem Gehäuse mit der Präzessionsgeschwindigkeit  $\omega_p$ . Die Taumelfrequenz  $\dot{\phi}$  soll der Abstimmbedingung (3) genügen:

$$\dot{\phi} = \omega_p$$

Mit (4) werden dann die Koordinaten der Drehgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_Z$  des Zwischensystems

$${}_Z \vec{\omega}_Z = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}_G \vec{\omega}_G + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_T \\ \omega_p \end{bmatrix} \quad (5)$$

Das Schwungrad schliesslich dreht sich gegenüber dem Zwischensystem mit der Drehzahl  $\omega_S$  um die x-Achse. Die Drehgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  des Schwungrades, in den Koordinaten des Zwischensystems, lautet damit

$${}_Z \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_S \\ \Omega_T \\ \omega_p \end{bmatrix} \quad (6)$$

Die Koordinaten des Drallvektors  $\vec{L}$  für das symmetrische Schwungrad mit den Massenträgheitsmomenten A, B sind im Zwischensystem

$${}_Z \vec{L} = \begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & B \end{bmatrix} {}_Z \vec{\omega} \quad (7)$$

Damit liefert der Drallsatz in dem mit  $\vec{\omega}_Z$  drehenden Zwischensystem

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega}_Z \times \vec{L} = \vec{M}$$

oder mit (6,7)

$$\begin{aligned}
 A\dot{\omega}_S &= M_x = F_R d \\
 A\omega_S \omega_P &= M_y = F_N D \\
 B\dot{\omega}_P - A\omega_S \Omega_T &= M_z = -F_R D
 \end{aligned} \tag{8}$$

Die Momente, die auf das Schwungrad wirken, ergeben sich aus den Normalkräften  $F_N$  und den Reibungskräften  $F_R$ , die beim Abrollen entstehen (Bild 3). Beim idealen Rollen gilt zusätzlich die Beziehung

$$F_R \leq \mu_0 F_N \tag{9}$$

mit dem Haftreibungskoeffizienten  $\mu_0$ . Es wäre durchaus möglich, hier auch ein sicherlich vorhandenes Rollreibungsmoment oder Luftreibungsmoment  $M_R$  um die x-Achse zu berücksichtigen. Es trägt aber zum Verständnis der Selbsterregung nichts Wesentliches bei und macht die Lösung unübersichtlich.

Berücksichtigt man die kinematische Abrollbedingung (1)

$$\omega_P = \frac{d}{D} \omega_S$$

dann folgen aus (8) schnell die restlichen Unbekannten  $\omega_S$ ,  $F_N$ ,  $F_R$ . Die Drehzahl

$$\omega_S = \omega_{S0} e^{t/T}, \quad \text{mit } \frac{1}{T} = \Omega_T \frac{d}{D} \frac{A}{A+B(d/D)^2}, \tag{10}$$

nimmt also von einer Anfangsdrehzahl  $\omega_{S0}$  an mit der Zeit zu. Die Zunahme erfolgt umso langsamer je grösser die Zeitkonstante  $T$  ist, d.h. je kleiner die Amplitude  $\Omega_T$  der Taumelbewegung und je grösser die Uebersetzung  $D/d$  ist.

Die Anpresskraft wird

$$F_N = \frac{Ad}{D} \omega_S^2, \tag{11}$$

nimmt also quadratisch mit der Drehzahl zu. Das dadurch verursachte umlaufende Moment

$$M_Y = F_N D$$

lässt sich nach (8) gerade auch als Kreiselmoment auffassen und ruft als Reaktion in der Hand ein Rüttelmoment hervor mit der Amplitude

$$M = M_Y = A \frac{d}{D} \omega_S^2 . \quad (12)$$

Die Reibungskraft wird

$$F_R = \frac{A}{dT} \omega_S , \quad (13)$$

unterliegt aber der Zusatzbedingung (9). Wird diese verletzt, tritt Gleiten auf und die kinematischen Voraussetzungen für das Aufstellen der Bewegungsgleichungen gelten nicht mehr. Das ist z.B. der Fall, wenn die Anfangsdrehgeschwindigkeit  $\omega_{S0}$  zu klein und die Taumelamplitude  $\Omega_T$  zu gross ist. Die Synchronisierung von Taumelfrequenz und Präzessionsfrequenz gelingt dann nicht mehr: die Laufachse rutscht durch statt abzurollen. Damit das nicht eintritt, muss also (9) erfüllt sein, was mit (11,13) auf

$$\frac{(D/d)^2}{T \omega_S(t)} \leq \mu_0$$

führt. Falls diese Beziehung für  $t = 0$  erfüllt ist, wird sie wegen (10) auch für  $t > 0$  gelten. Damit ergibt sich für die Anfangsdrehgeschwindigkeit  $\omega_S(t=0) = \omega_{S0}$  die Forderung

$$\omega_{S0} \geq \left( \frac{D}{d} \right)^2 \frac{1}{T \mu_0} , \quad (14)$$

damit Abrollen von Anfang an möglich ist.



#### 4. Beispiel

Zur Illustration des Verhaltens eignen sich einige Zahlenwerte: Bei einem Lagerabstand von  $D = 64$  mm und einem Laufachsendurchmesser  $d = 2$  mm ergibt sich ein kinematisches Uebersetzungsverhältnis

$$D/d = 32$$

Die Masse des Schwungrades von 180 g führt bei einem Trägheitsradius  $k \approx 23$  mm auf ein Trägheitsmoment

$$A \approx 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Kennzeichnet man die Taumelbewegung der Hand durch einen Taumelwinkel  $\alpha_0 \approx 15^\circ$  und eine Taumelfrequenz von anfänglich  $\dot{\phi} \approx 1$  Hz, dann wird  $\Omega_T \approx \alpha_0 \dot{\phi} = 1,6$  1/s.

Damit ergibt sich eine Zeitkonstante (10)

$$T \approx \frac{1}{\Omega_T} \frac{D}{d} = 20 \text{ s},$$

und die Drehzahl nimmt nach

$$\omega_S = \omega_{S0} e^{t/20}$$

zu. Bei einem Reibungskoeffizienten  $\mu_0 = 0,3$  muss die Anfangsdrehzahl (14)

$$\omega_{S0} > 170 \frac{1}{s} \approx 27 \text{ Hz}$$

sein, damit bei der gewählten Taumelbewegung Abrollen und kein Gleiten auftritt.

Die Drehzahl  $\omega_S$  erreicht bei diesen Antriebsmechanismus durchaus Werte von ca. 120 Hz. Die dazu erforderliche Taumelfre-

quenz  $\omega_p$  beträgt dabei 3,75 Hz. Auf die Hand wirkt dann ein maximales Rüttelmoment  $M \approx 1,7$  Nm.

### Literatur

- /1/ "Dynabee", U.S. Pat. No. 3726146
- /2/ Magnus, K.: Kreisel, Theorie und Anwendungen.  
Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971.
- /3/ Magnus, K.: Schwingungen. Stuttgart: Teubner 1961.

### Lebenslauf

\*23.3.1937 Freiburg/Br.; Stud.: 1956-1962 TH Stuttgart;  
1962-64 Inst. f. Steuer- und Regeltechnik DVLR Oberpfaffen-  
hofen; 1964 Ass. f. Mech. TH Stuttgart, bei Prof.Dr.rer.nat.  
K. Magnus; 1966 Dr.-Ing.; 1966- Ass., Akad.Dir. Inst.f.Mech.  
TU München; 1970-71 Res.Assoc.Marshall Space Flight C.,  
Huntsville USA; 1974 Habil. Mech.; 1978- a.o.Prof.f. Mech.  
ETH Zürich.

### Anschrift

Prof. Dr. G. Schweitzer  
Institut für Mechanik  
ETH Zürich  
CH-8092 Zürich